УДК 517.929

© *А. Ю. Куликов*

ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ

Исследуется устойчивость скалярных разностных уравнений с одним запаздыванием. На коэффициенты и запаздывания линейного неавтономного уравнения общего вида постепенно накладываются ограничения. От уравнения с произвольными коэффициентами и запаздываниями мы переходим к уравнению с ограниченными запаздываниями, затем к уравнению с постоянными коэффициентами и, наконец, к автономному уравнению. Показано как в процессе такого перехода расширяется область устойчивости.

Ключевые слова: разностные уравнения, уравнения с запаздыванием.

Обозначим $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$. Рассмотрим разностное уравнение

$$x(n+1) - x(n) = -a(n)x(n - h(n)), \quad n \geqslant 0, \tag{1}$$

где $a : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_+$, $h : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$.

Если не делать дополнительных предположений о коэффициентах a и запаздываниях h уравнения (1), то условия асимптотической устойчивости обеспечивает

Т е о р е м а 1 (см. [1, 2]). *Если* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sum\limits_{i=n-h(n)}^{n} a(i) < 3/2$ *и* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a(n) = \infty$, *то уравнение* (1) *асимптотически устойчиво.*

Константа $3/2$ в теореме 1 является точной. Если строгое неравенство в условии теоремы заменить нестрогим, то можно подобрать коэффициенты и запаздывания уравнения (1) так, что его решение не будет стремиться к нулю при $n \to \infty$ [2].

Условия приведенного признака в неявном виде уже требуют ограниченности коэффициентов, поэтому явное требование ограниченности коэффициентов не приведет к увеличению константы $3/2$. Накладывая же ограничения на запаздывания, константу, ограничивающую область устойчивости, можно увеличить.

Т е о р е м а 2 (см. [3]). *Пусть* $H = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} h(n) < \infty$. *Тогда если* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sum\limits_{i=n-h(n)}^{n} a(i) < \frac{3}{2} + \frac{1}{2H+2}$ *и* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a(n) = \infty$, *то уравнение* (1) *асимптотически устойчиво.*

Константа $3/2 + \frac{1}{2H+2}$ также является неулучшаемой. Пример приведен в работе [2].

Все выше рассмотренные уравнения были неавтономны. Естественно возникает вопрос, можно ли, накладывая дополнительные ограничения на коэффициенты или запаздывания уравнения, еще увеличить область устойчивости. В работе [4] показано, что попытка сделать запаздывания постоянными, оставив переменными коэффициенты, не позволяет увеличить константу $3/2 + \frac{1}{2H+2}$. Однако, если в уравнении (1) постоянны коэффициенты, то область устойчивости увеличивается.

Рассмотрим уравнение

$$x(n+1) - x(n) = -ax(n - h(n)), \quad n \geqslant 0, \tag{2}$$

где $a \geqslant 0$, $h : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, причем $h(n) \leqslant H$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Заметим, что $a(H+1) \geqslant \sum\limits_{i=n-h(n)}^{n} a$.

Введем функцию ω по правилу:

$$\omega(H) = \begin{cases} \frac{12(H+1)}{5H+3+\sqrt{9H^2+6H+9}}, & \text{при} \quad H \equiv 0 \pmod 3; \\ \frac{3(H+1)}{2H+1}, & \text{при} \quad H \equiv 1 \pmod 3; \\ \frac{12(H+1)}{5H+2+\sqrt{9H^2+12H+12}}, & \text{при} \quad H \equiv 2 \pmod 3). \end{cases}$$

Т е о р е м а 3 (см. [5]). *Пусть* $0 < (H+1)a < \omega(H)$. *Тогда уравнение* (2) *асимптотически устойчиво.*

Нетрудно убедиться, что $\omega(H) \geqslant 3/2 + \frac{1}{2H+2}$, причем $\omega(H) = 3/2 + \frac{1}{2H+2}$ только при $H = 0$.

Обратим внимание на то, как разностное уравнение проявляет свою дискретную природу. Аналогом уравнения (1) является функционально-дифференциальное уравнение

$$\dot{y}(t) = -p(t)x(t - r(t)), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{3}$$

где $p : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ локально суммируема, а $r : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — измерима по Лебегу на $\mathbb{R}_+$. Известен следующий признак устойчивости.

Т е о р е м а 4 (см. [6]). *Если* $\varlimsup\limits_{t\to\infty} \int\limits_{t-r(t)}^{t} p(s)\,ds < 3/2$ *и* $\int\limits_{0}^{\infty} p(n) = \infty$, *то уравнение* (3) *асимптотически устойчиво.*

Заметим, что ни ограниченность запаздывания, ни постоянство коэффициента не позволяют увеличить константу $3/2$ в формулировке этого признака.

Наконец, рассмотрим автономное уравнение

$$x(n+1) - x(n) = -ax(n-H), \quad n \geqslant 0, \tag{4}$$

где a, $H \geqslant 0$. Для него давно известен признак асимптотической устойчивости

Т е о р е м а 5 (см. [7]). *Пусть* $0 < (H+1)a < 2(H+1)\cos\frac{\pi H}{2H+1}$. *Тогда уравнение* (4) *асимптотически устойчиво.*

Как и следовало ожидать, константа $2(H+1)\cos\frac{\pi H}{2H+1}$ — самая большая из всех приведенных нами.

Список литературы

1. Zhang B.G., Tian C.J., Wong P.J.Y. Global attractivity of difference equation with variable delay // Dynam. Contin. Discrete Impuls. Systems. 1999. № 6. P. 307–317.
2. Куликов А.Ю., Малыгина В.В. Об устойчивости неавтономных разностных уравнений с несколькими запаздываниями // Известия вузов. Математика. 2008. № 3. С. 18–26.
3. Yu J.S. Asymptotic Stability for a Linear Difference Equation with Variable Delay // Comp. Math. Appl. 1998. Vol. 36. № 10–12. P. 203–210.
4. Malygina V.V., Kulikov A.Y. On precision of constants in some theorems on stability of difference equations // Funct. Diff. Equat. 2008. Vol. 15. № 3–4. P. 239–248.
5. Куликов А.Ю., Малыгина В.В. Об устойчивости полуавтономных разностных уравнений // Известия вузов. Математика. 2011. № 5. С. 25–34.
6. Малыгина В.В. Некоторые признаки устойчивости уравнений с запаздывающим аргументом // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 10. С. 1716–1723.
7. Levin S.A., May R.M. A note on delay-differential equations // Theoret. Popul. Biol. 1976. № 9. P. 178–187.

Поступила в редакцию 14.02.2012

A. Yu. Kulikov

Regions of stability for a difference equation

Stability of scalar difference equations with one delay is investigated. Restrictions are layed consequently on coefficients and delays of the linear nonautonomous equation of general form. First we consider the equation with arbitrary coefficients and delays, then the equation with limited delays, the one with constant coefficients, and, at last, the autonomous equation. It is demonstrated how the region of stability is expanded.

Keywords: difference equations, equations with delay.

Mathematical Subject Classifications: 39A30

Куликов Андрей Юрьевич, старший инженер-программист, ООО «Предприятие точной механики», 456200, Россия, Челябинская обл., г. Златоуст, ул. Ленина, д. 2. E-mail: stphn@mail.ru

Kulikov Andrei Yur'evich, senior programming engineer, OOO «Predpriyatie tochnoi mekhaniki», ul. Lenina, 2, Zlatoust, Chelyabinsk Region, 456200, Russia